1 Odvození poptávkové křivky

Optimalizační chování domácností (maximalizace užitku) vzhledem k rozpočtovému omezení. Nejprve odvodíme deterministický model, který potom rozšíříme o stochastické prvky. Odvozené podmínky prvního řádu budeme poté log-linearizovat okolo steady statu (rovnovážného stavu).

1.1 Užitková funkce

Uvažujeme malou uzavřenou ekonomiku, která se skládá z mnoha domácností. Domácnosti jsou homogenní, můžeme proto analyzovat chování jedné *reprezentativní* domácnosti. Domácnost maximalizuje časově diskrétní užitkovou funkci tvaru

$$\max_{C_t,L_t} \sum_{\tau=0}^{\infty} \beta^{\tau} U(C_{t+\tau}, L_{t+\tau}),$$

kde $\beta \in (0,1)$ je diskontní faktor (vyjadřuje míru netrpělivosti domácnosti ze spotřeby), C_t označuje spotřebu domácností v čase t, a L_t představuje volný čas. Počet odpracovaných hodin (práce přináší domácnosti „disutilitu“) je značen H_t a platí pro ně $L_t + H_t = 24$, což můžeme normalizovat jako $L_t = 1 - H_t$.[1]

Užitková funkce má obvyklé vlastnoti (je kladná, rostoucí, konkávní):

- První derivace značí mezní užitek, který je kladný. Tzn. např. pro C_t platí
$$\frac{\partial U}{\partial C} = MU_C > 0,$$
- přírůstky funkce se snižují. Druhá derivace funkce (první derivace mezního užitku) je záporná, tzn. např. pro C_t platí
$$\frac{\partial^2 U}{\partial C^2} = \frac{\partial MU_C}{\partial C} < 0$$

Konkrétní tvar užitkové funkce vypadá následovně

$$U(C_t, L_t) = \log C_t + \Psi \log\ L_t,$$

Logaritmická funkce je speciálním případem CES funkce (Constatnt Elasticity of Substitution), např.

$$U(C_t) = \frac{C_t^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma},$$

[1] Volný čas zde zahrnuje i čas potřebný na spánek.

kde σ je koeficient mezičasové elasticity substituce. Pro $\sigma \to 1$ konverguje CES funkce k logaritmické funkci.

1.2 Rozpočtové omezení

Rozpočtové omezení domácnosti má následující tvar

$$B_{t-1}(1+i_{t-1}) + W_t H_t = C_t P_t + B_t \tag{1}$$

kde B_{t-1} jsou obligace nakoupené v čase $t-1$ a splatné v čase t, i_{t-1} je nominální úroková míra v čase $t-1$, W_t je nominální mzda a P_t označuje cenovou hladinu. Levá strana rovnice (1) označuje celkové zdroje domácností (v nominálním vyjádření). Tvoří je v minulosti nakoupené obligace a mzdový příjem za vykonanou práci. Pravá strana rovnice (1) vyjadřuje celkové výdaje na spotřebu a nákup obligací. Podobnému rozpočtovému omezení čelí domácnosti v každém dalším období $t+1$, $t+2$, ...

Rozpočtové omezení můžeme rozepsat pro čas $t+1$, $t+2\ldots$ až do nekonečna a zpětným dosazením za B_{t+k} nám vyjde:[2]

$$\begin{aligned} B_{t-1}(1+i_{t-1}) = {} & [C_t P_t - W_t H_t] + \\ & + (1+i_t)^{-1}\,[C_{t+1}P_{t+1} - W_{t+1}H_{t+1}] + \\ & + (1+i_{t+1})^{-1}(1+i_t)^{-1}\,[C_{t+2}P_{t+2} - W_{t+2}H_{t+2} + \cdots] \end{aligned} \tag{2}$$

Rovnice (2) vyjadřuje celkové rozpočtové omezení domácností, při uvažování v nekonečném časovém horizontu. Tuto úpravu využijeme v následujícím kroku při optimalizaci.

1.3 Maximalizace užitkové funkce

Pro maximalizaci užitkové funkce použijeme Langrangián [3]

$$\begin{aligned} & \sum_{\tau=0}^{\infty} \beta^{\tau}[\log C_{t+\tau} + \Psi \log(1-H_{t+\tau})] + \\ & + \lambda\Big(B_{t-1}(1+i_{t-1}) + W_t H_t - C_t P_t - \\ & - (1+i_t)^{-1}[C_{t+1}P_{t+1} - W_{t+1}H_{t+1}] - \\ & - (1+i_{t+1})^{-1}(1+i_t)^{-1}\,[C_{t+2}P_{t+2} + \cdots\Big), \end{aligned} \tag{3}$$

[2]Předpokládáme, že na "konci světa" jsou všechny dluhy splaceny, $\lim_{k\to\infty} B_{t+k} = 0$ (*no-Ponzi game condition*)

[3]Za volný čas dosadíme výraz $L_t = 1 - H_t$

který derivujeme dle C_t, C_{t+1} a H_t (domácnost si vybírá, kolik bude spotřebovávat a pracovat, vzhledem k rozpočtovému omezení) a derivace položíme rovny nule. Vyjdou nám následující podmínky prvního řádu:

$$\frac{1}{C_t} - \lambda P_t = 0 \tag{4}$$

$$\beta \frac{1}{C_{t+1}} - \lambda \frac{P_{t+1}}{1+i_t} = 0 \tag{5}$$

$$-\Psi \frac{1}{1-H_t} + \lambda W_t = 0 \tag{6}$$

Dále zavedeme identity pro inflaci π_t a reálnou úrokovou míru r_t

$$1 + \pi_t = \frac{P_t}{P_{t-1}} \tag{7}$$

$$1 + r_t = \frac{1+i_t}{1+\pi_{t+1}} \tag{8}$$

Z rovnice (4) vyjádříme $\lambda = \frac{1}{C_t P_t}$ a dosadíme do rovnic (6) a (5). Postupnými úpravami a použitím rovnice (8) dostaneme

$$\Psi \frac{C_t}{1-H_t} = \frac{W_t}{P_t} \tag{9}$$

$$C_t = C_{t+1} \frac{1}{1+r_t} \frac{1}{\beta} \tag{10}$$

Rovnice (9) představuje nabídku práce domácností. Levá strana rovnice je mezní míra substituce mezi prací a volným časem, pravá strana rovnice vyjadřuje reálnou mzdu.[4] Rovnice (9) se nazývá Eulerova rovnice a představuje optimum při intertemporálním (mezičasovém) rozhodování domácností o spotřebě. V dalším textu se na tuto rovnici budeme odkazovat jako IS křivku nebo křivku agregátní poptávky.

[4] Pro naše odvození New Keynesian modelu se „sticky prices“ nebudeme tento vztah potřebovat, proto se jím nebudeme dále zabývat. Při předpokladu rigidních mezd je však tato rovnice klíčová.

1.4 Log-linearizovaná forma

Nelineární model je dost složitý na řešení, proto ho budeme chtít log-linearizovat. Zajímá nás především, jak se jednotlivé veličiny odchylují od svých rovnvážný stavů (např. v důsledku působení šoků). Použijeme následujícího značení: $\bar{C}$ je rovnovážná úroveň (steady state), $\hat{c}_t$ je procentní odchylka od steady statu.

Parametr C_t rozepíšeme jako součin své rovnovážné úrovně $\bar{c}_t$ a procentní odchylky od rovnovážného stavu $\hat{c}_t$ [5]

$$C_t = \bar{C}_t(1 + \hat{c}_t).$$

Reálnou úrokovou míru rovněž můžeme rozepsat pomocí rovnovážné úrovně a procentní odchylky $r_t = \bar{r}_t + \hat{r}_t$. [6]

Pro steady state platí, že spotřeba se v čase nemění (můžeme odstranit časové indexy z rovnice (10)).

$$C = C \frac{1}{1+r} \frac{1}{\beta}$$

Z toho tedy vyplývá, že rovnovážná úroková míra $\bar{r}$ je tedy určena jako $1 + \bar{r} = \frac{1}{\beta}$. Když tento vztah zlogartimujeme $\log(1 + \bar{r}) = \log \frac{1}{\beta}$ a použijeme logaritmickou aproximaci,[7] dostaneme

$$\bar{r} = \log \frac{1}{\beta}. \tag{11}$$

Rovnici (10) můžeme rozepsat pomocí rovnovážných hodnot a jejich odchylek.

$$\bar{C}(1 + \hat{c}_t) = \bar{C}(1 + \hat{c}_{t+1}) \frac{1}{\beta} \frac{1}{1 + \bar{r} + \hat{r}_t}.$$

Po vykrácení $\bar{C}$ a zlogaritmování získáme

$$\log(1 + \hat{c}_t) = \log(1 + \hat{c}_{t+1}) + \log \frac{1}{\beta} - \log(1 + \bar{r} + \hat{r}_t).$$

Při použití aproximace a vztahu (11) dostaneme

$$\hat{c}_t = \hat{c}_{t+1} + \bar{r} - \bar{r} - \hat{r}_t.$$

[5] Například, hodnotu spotřeby $C_t = 110$ jednotek vyjádříme jako desetiprocenntí odchylku $\hat{c}_t = 0,10$ od rovnovážné úrovně $\bar{c}_t = 100$, tedy $C_t = 100(1 + 0.10) = 110$.

[6] Například, úrokovou míru 5%, která vyjadřuje odychlku 2% od rovnovážné úrovně 3%, rozepíšeme jako $r_t = 0,03 + 0,02 = 0,05 = 5\%$

[7] log(.) značí přirozený logaritmus, a pro malá x (do 0,10) platí $\log(1 + x) = x$.

Nakonec tedy získáme rovnici agregátní poptávky (IS křivku).

$$\hat{c}_t = \hat{c}_{t+1} - \hat{r}_t. \tag{12}$$

Tato rovnice při zahrnutí očekávání, která jsme z hlediska transparentnosti „vynechali“, vypadá následovně

$$\hat{c}_t = E_t\hat{c}_{t+1} - \hat{r}_t \tag{13}$$

Současná spotřeba je závislá pozitivně na očekávané spotřebě v následujícím období a negativně na reálné úrokové míře. Vzhledem k tomu, že v našem modelu neuvažujeme kapitál (investice), je celkový výstup roven spotřebě, můžeme tedy psát $\hat{c}_t = \hat{y}_t$. Reálnou úrokovou míru můžeme rozepsat jako rozdíl nominální úrokové míry a očekávané míry inflace $\hat{r}_t = i_t - E_t\pi_{t+1}$. Do rovnice (13) můžeme zahrnout i náhodnou složku ϵ_t, která zachycuje poptávkové šoky (např. změnu preferencí) a má vlastnosti bílého šumu (stacionární proces s nulovou střední hodnotou, konstatním rozptylem a nekorelovanými hodnotami v různém čase $\epsilon_t \sim WN(0, \sigma_\epsilon^2)$.

$$\hat{y}_t = E_t\hat{y}_{t+1} - (i_t - E_t\pi_{t+1}) + \epsilon_t \tag{14}$$

Při odvozování IS křivky z CES funkce se u úrokové míry vyskytuje parametr $\frac{1}{\sigma}$ (inverzní hodnota koeficientu elasticity), který je pro log funkci roven 1. Obecnější podoba IS křivky je tedy

$$\hat{y}_t = E_t\hat{y}_{t+1} - \frac{1}{\sigma}(i_t - E_t\pi_{t+1}) + \epsilon_t \tag{15}$$

Pro zvýšení schopnosti zachytit chování v datech (persistence výstupu při reakci na šoky) se do rovnice (15) se zahrnuje zpožděná hodnota výstupu (spotřeby), což lze behaviorálně vysvětlit (a odvodit) jako zvyklost ve spotřebě (habit in consumption).[8]

$$\hat{y}_t = (1-\gamma)\hat{y}_{t-1} + \gamma E_t\hat{y}_{t+1} - \frac{1}{\sigma}(i_t - E_t\pi_{t+1}) + \epsilon_t \tag{16}$$

Výsledná rovnice tak má vpřed i vzad hledící charakter a stochastickou povahu.

[8] Vliv spotřeby je rozdělen homogenně s vahami $(1-\gamma)$ a γ, kde parametr $\gamma \in (0,1)$