Všeobecná rovnováha 2 – Jednoduchá dynamika (Sollowův model)

Předpoklady

- Dynamický model rovnovážného růstu se standardně (a velmi elegantně) odvozuje ve spojitém čase. Vzhledem k tomu, že na naší škole se žádné spojité modely nikde a nikdy pravděpodobně neprobírají a že vyžadují poněkud jinou ekonomickou intuici, zůstaneme u diskrétního času.
- Na ekonomiku se budeme pro větší jednoduchost dívat výjimečně jako na uzavřenou (neexistuje zahraniční obchod a ekonomika nemůže ani půjčovat do zahraničí ani si půjčovat ze zahraničí). V tom případě bude platit identita

$$Y \equiv C + I \equiv C + S$$

neboli

$$I \equiv S$$

- Tržby za domácí produkt Y se dostávají ve formě plateb výrobním faktorům a rozdělených zisků k domácnostem jako domácí důchod, který se poté rozkládá na úspory $S = sY$ a spotřebu $C = (1-s)Y$ – předpokládáme konstantní mezní sklon k úsporám $s \in (0,1)$.
- Dynamický model rovnovážného růstu odvodíme z produkční funkce bez technologického pokroku (odvození s technologickým pokrokem je myšlenkově poněkud náročnější a přesahuje rámec tohoto kursu). Produkční funkce $F(K,L)$ zůstane stejná (tj. se stejnými vlastnostmi) jako v případě statické rovnováhy.
- Dynamika bude do modelu vnesena dvěma způsoby : <u>exogenně</u> – budeme předpokládat konstantní procentní růst pracovní síly L (tj. ve zjednodušeném pohledu počet obyvatel) daný demograficky, tj. nezávisle na modelovaném ekonomickém systému :

$$\frac{\Delta L}{L} = \lambda = konst.$$

a <u>endogenně</u> ve formě rovnice popisující tvorbu kapitálu. Do modelu si budeme moci dovolit vnést znehodnocení kapitálu, které jsme až doposud zanedbávali – výsledné vztahy jsou potom velice dobře intuitivně interpretovatelné :

$$K_{t+1} - K_t = \Delta K = I - \delta\ K$$

kde $\delta \in (0,1)$ je míra znehodnocení existujícího kapitálu (procentní vyjádření národohospodářských odpisů).

Řešení dynamického modelu

Model je založen na pěti zmíněných rovnicích a identitách:

$$I \equiv S \qquad (1)$$

$$S = sY \qquad (2)$$

$$Y = F(K,L) \qquad (3)$$

$$\frac{\Delta L}{L} = \lambda \qquad (4)$$

$$\Delta K = I - \delta\ K \qquad (5)$$

kde s, λ, δ jsou pevné známé parametry daného ekonomického systému.

Díky předpokladu lineární homogenity produkční funkce můžeme provést následující úpravu:

Platí-li pro všechna c : $F(cK, cL) = cF(K, L)$, můžeme K i L v produkční funkci vynásobit $\frac{1}{L}$ a dostáváme

$$F\left(\frac{K}{L}, \frac{L}{L}\right) = \frac{1}{L} F(K,1) = \frac{Y}{L}$$

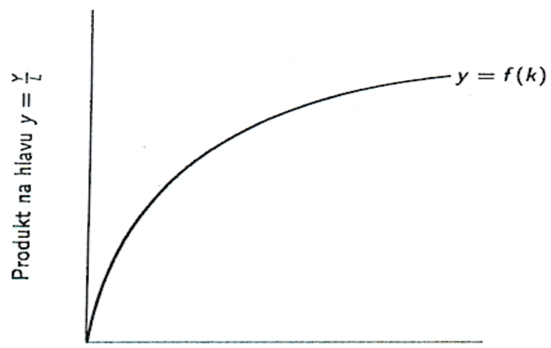
Označíme-li $k = \frac{K}{L}$ (míra vybavenosti práce kapitálem), $y = \frac{Y}{L}$ (produkt na jednotku práce, tj.produkt na hlavu), a $f(k) = F\left(\frac{K}{L},1\right)$, potom platí

$$y = f(k)$$

což je tzv. <u>intenzivní tvar produkční funkce</u>, tj. výsledný produkt na hlavu je funkcí pouze míry vybavenosti práce kapitálem (kolik kapitálového vybavení připadá na jednoho zaměstnaného člověka).

Lze dokázat, že intenzivní produkční funkce zachovává základní ekonomické vlastnosti původní funkce, tj. kladnou první a zápornou druhou derivaci - je tedy konkávní, viz.obr.1.

Obr.1 – Intenzivní produkční funkce



Klíčové pro řešení modelu je Δk, tj. vývoj vybavenosti práce kapitálem v čase. Z definice $k = \frac{K}{L}$ (na pravou stranu se díváme jako na složenou funkci) můžeme vypočítat totální diferenciál

$$\Delta k = \frac{1}{L}\Delta K - \frac{K}{L^2}\Delta L$$

Za ΔK dosadíme z (5) a za $\frac{\Delta L}{L}$ z rovnice (4) a dostaneme

$$\Delta k = s\frac{Y}{L} - \delta\frac{K}{L} - \lambda\frac{K}{L} = sy - k\delta - k\lambda$$

a tedy

$$\Delta k = sf(k) - k(\delta + \lambda) \qquad (6)$$

V konečném tvaru (6)

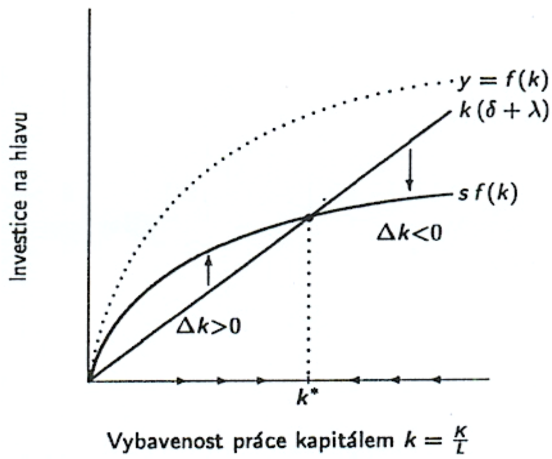
- členy $y\,s$ značí celkové skutečné investice na jednotku práce (na hlavu),
- člen $k(\delta+\lambda)$ značí množství investic, které by bylo potřeba provést k tomu, aby celková vybavenost práce kapitálem zůstala na stejné úrovni – tj. potřebujeme zvýšit kapitál o to, jaké množství práce (zaměstnaných) přibilo (λ) plus o to, kolik kapitálu se znehodnotilo (δ).

Rovnice (6) tak má následující interpretaci:
Jestliže $sf(k)-k(\delta+\lambda)$, tj. skutečné investice na hlavu převyšují úroveň investic potřebných k udržení *k*, potom samozřejmě podle rovnice (6) vybavenost práce kapitálem vzroste, $\Delta k>0$. Naopak, pokud skutečné investice jsou menší než potřebné, vybavenost klesá.

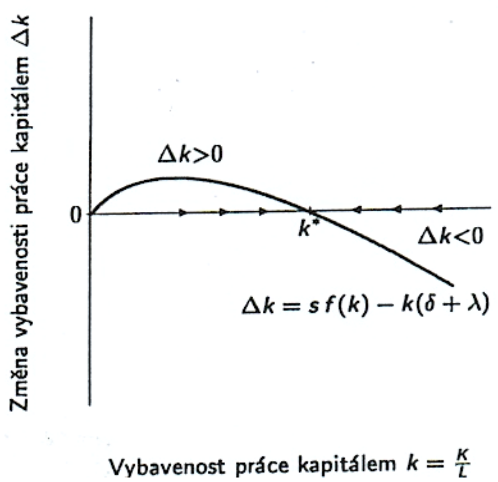
Důležitá je vazba, že při vysokém *k* bude Δk záporná, tj. *k* samo o sobě bude klesat, a naopak, při nízkém *k* bude Δk kladné, tj. *k* bude růst. Tato skutečnost vyplývá z obr.2a (Na obr.2a je znázorněna jednak úroveň skutečných investic na hlavu $sf(k)$ (odvozená z obr.1 jako snížení $f(k)$ na *s*-násobek, $s\in(0,1)$) a jednak úroveň investic na hlavu potřebných pro udržení konstantního *k*) .

Ekvivalentně lze diferenční rovnici (6) zachytit pomocí tzv. <u>fázového diagramu</u>, viz obr.2b. Ten znázorňuje pohyb *k*, tj. Δk přímo jako funkci *k* (přesně podle rovnice (6)). Přechod od obr.2a k obr.2b je prostý – pouze od sebe odečteme hodnoty obou znázorněných křivek a dostanem výslednou křivku obr.2b.

Obr.2a-Investice na hlavu



Obr.2b-Fázový diagram



Bod stability (neboli stabilní řešení diferenční rovnice (6)), tj. případ, kdy $\Delta k = 0$ neboli k zůstává konstantní na úrovni, kterou označíme $\bar{k}$ a nazveme "rovnovážná vybavenost práce kapitálem", nastává při

$$\Delta k = sy - k(\delta + \lambda) = 0 \Rightarrow \bar{k} = \frac{sy}{\delta + \lambda}$$

Podíváme-li se na obr.2a nebo obr.2b, je zřejmé, že začneme-li na jakékoliv úrovni k, zkonverguje k díky rovnici (6) vždy do $\bar{k}$, tj. popisovaný ekonomický systém bude vždy stabilní – v dlouhodobém horizontu se vždy ustálí na $\bar{k}$.

Po ekonomické stránce dává toto řešení jednoznačnou interpretaci. Při nulovém technickém pokroku zkonverguje jakákoliv ekonomika v dlouhodobém horizontu ke konstantní vybavenosti práce kapitálem $\bar{k}$. To znamená, že i výsledný rovnovážný produkt na hlavu $\frac{Y}{L} = \bar{y} = f(\bar{k})$ bude konstantní, neboli , že celkový produkt Y poroste přesně stejným tempem jako počet lidí (λ).

V dlouhodobém horizontu tak bude růst Y dán exogenně demografickými faktory.

Budeme-li mít dvě ekonomiky (A,B) se stejným růstem počtu lidí (tj. množství práce) $\lambda_A = \lambda_B$, ustálí se v dlouhém období růst jejich produktu na stejné úrovni (růst, nikoliv samotná úroveň Y, tj. obecně $Y_A \neq Y_B$, pouze $\frac{\Delta Y_A}{Y_A} = \frac{\Delta Y_B}{Y_B}$).

Budeme-li navíc předpokládat, že v obou dvou ekonomikách bude stejný mezní sklon k úsporám $s_A = s_B$ a stejná míra znehodnocování kapitálu $\delta_A = \delta_B$, dostaneme i stejnou rovnovážnou hodnotu $\bar{k}_A = \bar{k}_B$, neboli i stejný rovnovážný produkt na hlavu $\bar{y}_A = f(\bar{k}_A) = \bar{y}_B = f(\bar{k}_B)$.

Podrobnější rozbor dynamiky v tomto jednoduchém modelu bude na cvičení.