1 Modely s racionálními očekáváními

Nechť proměnná Π_t značí očekávanou hodnotu nějaké veličiny pro čas t na základě informací dosažitelných v čase t. Podobně nechť proměnná Π_{t+k} značí očekávanou hodnotu nějaké veličiny pro čas $t+k$ na základě informací dosažitelných v čase t. Předpokládejme, že současná hodnota veličiny závisí určitou měrou (α) na své očekávané hodnotě v příštím období a na nějakém exogenním vlivu Y_t lineárně:

$$\Pi_t = \alpha\Pi_{t+1} + Y_t \tag{1}$$

Tuto diferenční rovnici můžeme rozepsat pro všechna období $t+1, t+2\ldots$ až do ∞:

$$\begin{aligned}\Pi_{t+1} &= \alpha\Pi_{t+2} + Y_{t+1}\\ \Pi_{t+2} &= \alpha\Pi_{t+3} + Y_{t+2}\\ &\vdots\end{aligned}$$

Výraz na pravé straně rovnice pro Π_{t+k} dosadíme vždy do rovnice předchozí (zpětná iterace). Provedeme-li to nekonečně mnohokrát, dostaneme Π_t jako následující nekonečnou sumu:

$$\Pi_t = \lim_{n\to\infty}\left(\alpha^n\Pi_{t+n} + Y_t + \alpha Y_{t+1} + \cdots + \alpha^n Y_{t+n}\right) \tag{2}$$

Pokud vývoj veličiny Π_t nijak neomezíme, nemusí být uvedená limita konečná a systém exploduje. Pokud je parametr α stabilní, tj. pokud $\alpha \in (-1,1)$, dostaneme nekonečně mnoho stabilních řešení. Abychom dostali jediné stabilní řešení, musí být zároveň splněny dvě podmínky:

- $\alpha \in (-1,1)$
- Π_{t+n} neroste nade všechny meze

Výše uvedené podmínky zajišťují, že Π_{t+n} neexploduje, ale v limitě konverguje k nule:

$$\lim_{n\to\infty}\alpha^n\Pi_{t+n} = 0$$

Rovnice (2) se tedy zjednoduší na:

$$\Pi_t = \sum_{k=0}^{\infty}\alpha^k Y_{t+k}.$$

Příkladem takového vpředhledícího lineárního modelu je např. Phillipsova křivka následujícího tvaru:

$$\pi_t = \alpha E_t \pi_{t+1} + \hat{y}_t, \tag{3}$$

kde π_t je míra inflace v čase t, α je parametr, $E_t \pi_{t+1} = E(\pi_{t+1}|\Omega_t)$ jsou podmíněná očekávání míry inflace v čase $t+1$ při znalosti všech relevantních informací dostupných v čase t.

2 Řešení lineárních modelů s RE

2.1 Převod modelu

Rovnice v modelu převedeme do následujícího tvaru:

$$AE_t x_{t+1} = Bx_t + C\epsilon_t, \tag{4}$$

kde A, B jsou matice koeficientů příslušejících vektoru x_{t+1} a x_t, C je matice koeficientů exogenní složky ϵ.

2.1.1 Příklad

Rovnici ve tvaru

$$\pi_t = \alpha \pi_{t-1} + \beta E_t \pi_{t+1} + \epsilon_t \tag{5}$$

chceme převést do podoby rovnice (4). Vektor x_t tedy bude obsahovat složky π_{t-1} a π_t, tedy

$$E_t x_{t+1} = \begin{bmatrix} \pi_t \\ \pi_{t+1} \end{bmatrix} \quad x_t = \begin{bmatrix} \pi_{t-1} \\ \pi_t \end{bmatrix}$$

Mezi jednotlivými složkami těchto vektorů je vztah (horní index označuje, o který prvek ve vektoru x_t se jedná).

$$E_t x_{t+1}^{(1)} = x_t^{(2)} \tag{6}$$

Rovnici (5) můžeme přepsat jako

$$x_t^{(2)} = \alpha x_t^{(1)} + \beta E_t x_{t+1}^{(2)} + \epsilon_t \tag{7}$$

Přepis rovnice (4) se bude skládat z rovnice (7) a dále z rovnice (6) popisující vazbu mezi jednotlivými složkami vektorů x_t a x_{t+1}, tedy maticově lze psát:

$$\begin{bmatrix} 0 & -\beta \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_t x_{t+1}^{(1)} \\ E_t x_{t+1}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t^{(1)} \\ x_t^{(2)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \epsilon_t$$

což je v původních veličinách

$$\begin{bmatrix} 0 & -\beta \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_t \pi_t \\ E_t \pi_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi_{t-1} \\ \pi_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \epsilon_t.$$

Prvky vektoru x_t, které v čase t známe, nazveme *predeterminovanými*. Ty, které neznáme nazveme *nepredeterminovanými*.

2.2 Rozklad a transformace

Dále se budeme zabývat pouze případem, kdy matice A je regulární. Provedeme několik úprav rovnice (4).

$$\begin{aligned} AE_t x_{t+1} &= Bx_t + C\epsilon_t \\ E_t x_{t+1} &= A^{-1}Bx_t + A^{-1}C\epsilon_t \\ E_t x_{t+1} &= \tilde{B}x_t + \tilde{C}\epsilon_t, \end{aligned} \tag{8}$$

kde $\tilde{B} = A^{-1}B$ a $\tilde{C} = A^{-1}C$.

Dále pro matici $\tilde{B}$ najdeme rozklad

$$\tilde{B} = PVP^{-1}$$

kde matice V je čtvercová diagonální matice, obsahující na hlavní diagonále vlastní čísla. Matice P obsahuje ve sloupcích vlastní vektory. Pro matici V platí $V = P^{-1}\tilde{B}P$.

> *Poznámka:* Vlastní vektory v dané matice A jsou takové vektory, které se tímto zobrazením pouze natahují nebo zkracují, tj.
>
> $$Av = \lambda v$$
>
> Číslo λ, které popisuje, jak se vektor zkrátil či natáhl, nazýváme vlastní číslo. Je-li toto číslo v absolutní hodnotě menší nebo rovno jedné, jedná se o vlastní číslo stabilní; v opačném případě je to vlastní číslo nestabilní.

Dále provedeme lineární transformaci vektoru x_t

$$x_t = Pz_t \tag{9}$$

Tedy každý prvek vektoru z_t obsahuje informaci, která ovlivňuje prvek ve vektoru x_t. Tuto transformaci dosadíme do rovnice (8) [1]

$$\begin{aligned} E_t x_{t+1} &= \tilde{B} x_t + \tilde{C}\epsilon_t \\ P z_{t+1} &= \tilde{B} P z_t + \tilde{C}\epsilon_t \\ z_{t+1} &= \underbrace{P^{-1}\tilde{B}P}_{V} z_t + P^{-1}\tilde{C}\epsilon_t \end{aligned}$$

Výsledkem je tedy

$$z_{t+1} = V z_t + D\epsilon_t,$$

kde $V = P^{-1}\tilde{B}P$ a $D = P^{-1}\tilde{C}$.

Abychom dostali jediné řešení, vyžaduje Blanchard-Kahnova podmínka, aby

- počet predeterminovaných veličin v x = počtu stabilních vlastních čísel

nebo obráceně

- počet nepredeterminovaných veličin v x = počtu nestabilních vlastních čísel

2.3 Nestabilní část

Rovnice modelu přeskupíme tak, aby v matici V byla nejdříve seřazena stabilní vlastní čísla (část matice označená V_{11}) a poté nestabilní (označeno V_{22}). Tomu samozřejmě odpovídají veličiny ve vektoru z. [2] Obdobně je rozdělena matice D. Pro ilustraci poslouží toto rozepsání

$$z = \begin{bmatrix} z^s \\ \hline z^u \end{bmatrix} \qquad V = \begin{bmatrix} V_{11} & 0 \\ 0 & V_{22} \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} D_1 \\ \hline D_2 \end{bmatrix}$$

Soustavu rovnic vyřešíme nejprve pro nestabilní část. Rozepíšeme si rovnice pro následující (dvě) časová období.

$$z^u_{t+1} = V_{22} z^u_t + D_2\epsilon_t \tag{10}$$

$$z^u_{t+2} = V_{22} z^u_{t+1} + D_2\epsilon_{t+1} \tag{11}$$

[1] Symbol z_{t+1} zde označuje očekávanou hodnotu a je zjednodušením zápisu $E_t z_{t+1}$.

[2] Veličiny jsou označené horním indexem s jako *stable* a u jako *unstable*.

Z rovnice (10) si vyjádříme z_t^u. Obdobně z rovnice (11) vyjádříme z_{t+1}^u a dosadíme do rovnice (10). Výsledkem je poté rovnice (12)

$$\begin{aligned} z_t^u &= V_{22}^{-1} z_{t+1}^u - V_{22}^{-1} D_2 \epsilon_t \\ z_{t+1}^u &= V_{22}^{-1} z_{t+2}^u - V_{22}^{-1} D_2 \epsilon_{t+1} \\ z_t^u &= V_{22}^{-2} z_{t+2}^u - V_{22}^{-2} D_2 \epsilon_{t+1} - V_{22}^{-1} D_2 \epsilon_t \end{aligned} \tag{12}$$

Pokud výše naznačený postup budeme aplikovat nekonečně mnohokrát, dojdeme k následujícímu výsledku:

$$z_t^u = \underbrace{(V_{22}^{-1})^{\infty} z_{t+\infty}^u}_{=0} - \sum_{k=0}^{\infty} (V_{22}^{-1})^{k+1} D_2 \epsilon_{t+k}. \tag{13}$$

Protože matice V_{22} patří k nestabilní části řešení, má tedy na diagonále vlastní čísla větší než jedna. Tedy její inverze V_{22}^{-1} má na diagonále převrácené hodnoty matice V_{22}, tj. čísla menší než jedna. Pokud ji budeme nekonečně mnohokrát umocňovat, tak tyto hodnoty budou konvergovat k nule. Můžeme tedy psát:

$$z_t^u = -\sum_{k=0}^{\infty} (V_{22}^{-1})^{k+1} D_2 \epsilon_{t+k}$$

2.4 Stabilní část

Nyní se můžeme pustit do řešení stabilní (horní) části vektoru z.

$$z_{t+1}^s = V_{11} z_t^s + D_1 \epsilon_t. \tag{14}$$

K vyřešení této diferenční rovnice potřebujeme znát počáteční podmínku, kterou získáme následujícím způsobem. Vektor x_t můžeme rozdělit na následující složky (predeterminovaná a nepredeterminovaná část):

$$x_t = \left[\frac{x_t^{pred.}}{x_t^{unpred.}} \right]$$

Protože $x_t = P z_t$ můžeme soustavu rovnic pro názornost napsat jako

$$P \left[\frac{z_t^s}{z_t^u} \right] = \left[\frac{x_t^{pred.}}{x_t^{unpred.}} \right]$$

Matice P má tuto strukturu

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} P_{12} \\ P_{21} P_{22} \end{bmatrix}$$

Horní část soustavy můžeme rozepsat

$$P_{11} z_t^s + P_{12} z_t^u = x_t^{pred.}$$

kde z_t^u jsme již vypočítali, $x_t^{pred.}$ v čase t známe. Snadno pak můžeme dopočítat z_t^s.

$$z_t^s = P_{11}^{-1}(x_t^{pred.} - P_{12} z_t^u)$$

Tento výsledek dosadíme do rovnice (14) a iterací získáme celou trajektorii z_{t+k}. Konečné řešení soustavy pak dostaneme zpětnou transformací

$$x_t = P z_t$$

2.5 BK podmínka

Pokud by Blanchard-Kahnova podmínka nebyla splněna, můžou nastat dva případy s těmito důsledky:

1. Počet stabilních vlastních čísel $<$ počet predeterminovaných proměnných $\Rightarrow$ soustava nemá ani jedno stabilní řešení
2. Počet stabilních vlastních čísel $>$ počet predeterminovaných proměnných $\Rightarrow$ soustava má nekonečně mnoho stabilních řešení

3 Příklad

Nasimulujte model (obsahující vpředhledící veličiny):

$$\begin{aligned}
y_t &= \alpha y_{t-1} + \beta r_t + \omega_t \\
\pi_t &= \gamma \pi_{t-1} + (1-\gamma) E_t \pi_{t+1} + \delta y_t + \chi_t \\
r_t &= i_t - E_t \pi_{t+1} \\
i_t &= \lambda y_t + \kappa E_t \pi_{t+1} + \xi_t
\end{aligned}$$

y_t je mezera výstupu, π_t míra inflace, i_t nominální úroková míra, r_t reálná úroková míra; α, β, γ, δ, λ, κ jsou parametry; ω_t, χ_t, ξ_t jsou náhodné složky. Parametry nakalibrujte těmito hodnotami: $\alpha = 0.8$, $\beta = -0.6$, $\gamma = 0.5$, $\delta = 0.3$, $\lambda = 0.5$, $\kappa = 1.5$