Stacionarita

Slabě stacionární proces má *střední hodnotu, rozptyl a autokovarianční strukturu* neměnnou v čase.

Formálně:

$$E(X_t) = \mu \quad \text{pro všechna } t$$
$$E(X_t^2) = \sigma^2 \quad \text{pro všechna } t$$
$$\text{cov}(X_t, X_k) = \text{cov}(X_{t+s}, X_{k+s}) \quad \text{pro všechna} \quad t, k, s$$

Korelační koeficient (teoretický)

$$\text{cov}(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))]$$

$$\text{var}(X) = \sigma_X^2 = E[X - E(X)]^2$$

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

Stacionarizace (pro zlogaritmovanou časovou řadu)

- diferencování (spíše pro nominální veličiny) – tempo růstu
- filtrace (spíše pro reálné veličiny) – rozklad na trend a odchylku od trendu (gap)

Autokorelace (při počítání diferencí)

Náhodná procházka

$$x_t = x_{t-1} + \epsilon_t$$

kde ϵ_t je bílý šum, $\epsilon_t \sim WN(0, \sigma_\epsilon^2)$.

První diference

$$\Delta x_t = x_t - x_{t-1} = \epsilon_t$$

žádná autokorelace

$$\text{cov}(\Delta x_t, \Delta x_{t-1}) = \text{cov}(\epsilon_t, \epsilon_{t-1}) = 0$$

Diference přes čtyři obchobí

$$\Delta_4 x_t = x_t - x_{t-4} = \epsilon_t + \epsilon_{t-1} + \epsilon_{t-2} + \epsilon_{t-3}$$

autokorelace je pak

$$\text{cov}(\Delta_4 x_t, \Delta_4 x_{t-1}) = \text{cov}(\epsilon_t + \epsilon_{t-1} + \epsilon_{t-2} + \epsilon_{t-3}, \epsilon_{t-1} + \epsilon_{t-2} + \epsilon_{t-3} + \epsilon_{t-4}) = 3\sigma_\epsilon^2$$

Filtrace

Předpoklady Hodrick-Prescottova filtru:

$$x_t = \bar{x}_t + \hat{x}_t$$

$$\Delta\bar{x}_t = \Delta\bar{x}_{t-1} + \omega_t$$

$$\hat{x}_t = \epsilon_t$$

kde x_t je (logartimus) původní časové řady, $\bar{x}_t$ je trendová komponenta, $\hat{x}_t$ je cyklická komponenta (gap), ω_t šok v růstu trendu, ϵ_t je cyklický šok. Šoky jsou bílé šumy $\epsilon_t \sim WN(0, \sigma^2_\epsilon)$, $\omega_t \sim WN(0, \sigma^2_\omega)$.

Optimální vyhlazovací konstanta:

$$\lambda = \frac{\sigma^2_\epsilon}{\sigma^2_\omega}.$$

Alternativní formulace HP filtru (optimalizační problém):

$$\min \left\{ \sum_{t=1}^{T} \hat{x}_t^2 + \lambda \sum_{t=1}^{T} [(\bar{x}_t - \bar{x}_{t-1}) - (\bar{x}_{t-1} - \bar{x}_{t-2})]^2 \right\}$$

λ zde vyjadřuje penalizaci rozptylu růstové komponenty (trendu). Pro $\lambda \to \infty$ je výsledkem lineární trend, pro $\lambda \to 0$ kopíruje trend původní časovou řadu.

Doporučené hodnoty λ: pro roční data 100, pro čtvrtletní 1600 a pro měsíční 14400.

Dekompozice HDP

Původní řada HDP je Y_t, trendová komponenta $\bar{Y}_t$, mezera (gap, cyklická komponenta) $\hat{y}_t$, je vyjádřena jako procentní odchylka od trendu (např. 0,05 je 5 %).

$$Y_t = \bar{Y}_t(1 + \hat{y}_t)$$

Obě strany zlogaritmujeme

$$\log Y_t = \log \bar{Y}_t + \log(1 + \hat{y}_t)$$

použijeme logaritmickou aproximaci[1] po označení logaritmů veličin malými písmeny dostaneme

$$y_t = \bar{y}_t + \hat{y}_t$$

což je přesně dekompozice proměnné podle HP filtru.

[1] $\log(1 + x) \approx x$ pro malé hodnoty x (do 0.15)